இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
விஞ்ஞானமாணி/கல்விமாணி பட்டப்பாடநெறி
இறுதிப் பரீட்சை - 2023/2024
தூய கணிதம் – மட்டம் 03
PEU3301 – கணிதத்தின் அடிப்படைகள்



காலம்: - இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

திகதி: - 17-03-2024 நேரம்: - பி.ப. 01.30 – பி.ப. 3.30

பொது அறிவுறுத்தல்கள்

1. வினாக்களுக்கு விடையளிக்கமுன் அனைத்து அறிவுறுத்தல்களையும் கவனமாக வாசிக்கவும்.
2. இவ் வினாப்பத்திரமானது பகுதி **A** மற்றும் பகுதி **B** என **இரண்டு** பகுதிகளைக் கொண்டுள்ளது. பகுதி **A** கட்டாயமானது மற்றும் இது **ஆறு** கட்டமைக்கப்பட்ட கட்டுரை வினாக்களைக் கொண்டுள்ளது.
3. பகுதி **B** யானது **ஐந்து** கட்டுரை வகையான வினாக்களைக் கொண்டுள்ளது அவற்றில் **மூன்று** வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்கவும். பகுதி **B** இல் ஒவ்வொரு வினாவுக்குமான புள்ளிகள் 100 ஆகும்

பகுதி A

அனைத்து வினாக்களுக்கும் விடையளிக்குக.

1.

a) $A = \{1, 2, \{1\}, \{1,2\}\}$ என்க. A இன் வலுத் தொடையைக் (power set) காண்க.

b) A மற்றும் B இரண்டு தொடைகள் என்க. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ எனக் காட்டுக.

c) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ என்னும் சார்பின் ஆட்சியைக் (domain) காண்க. உமது விடையை ஆயிடை குறிப்பீட்டில் (interval notation) வெளிப்படுத்துக.

d) $f($ $= 3x - 1,\ x \in \mathbb{R}$ மற்றும் $g(x) = x^2 + 2,\ x \in \mathbb{R}$ என்க. $f \circ g$ ஐக் காண்க.

e) $f(x) =$ $x \in \mathbb{R}$ என்க. $f([3,5])$ ஐக் காண்க.

f) $m \in \mathbb{N}$ என்க. ணிதத் தொகுத்தறிவு (mathematical induction) முறையைப் பயன்படுத்தி, ஒவ்வொரு $n \in \mathbb{N}$ இற்கும் $m + n \in \mathbb{N}$ என நிறுவுக.

பகுதி B

மூன்று வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

2.

a) சமனிலி $\frac{2x-5}{x-4} \geq 3$ ஐத் தீர்க்க, இங்கு $x \in \mathbb{R}$ ஆகும்.

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ஆனது $f(x) = x^2 + 1$ இனால் வரையறுக்கப்படுகிறது என்க. $f^{-1}([2,10))$ ஐக் காண்க.

c) A, B மற்றும் C தொடைகள் என்க. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ என நிறுவுக.

3.

a) m ஒரு முழு எண் என்க. xRy எனின் m ஆனது $x - y$ ஐ வகுக்கும் என்பதன் மூலம் $\mathbb{Z}$ இன் மீது R இன் தொடர்பானது வரையறுக்கப்படுகிறது என்க.

i. R என்பது $\mathbb{Z}$ மீதுள்ள ஒரு சமவன்மைத் தொடர்பு (equivalence relation) எனக் காட்டுக.

ii. $m = 2$ என எடுத்துக் கொண்டு, $R_0 = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ மற்றும் $R_1 = \{2n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$ ஆகியன மாத்திரம் R இன் இரண்டு சமவன்மை வகுப்புக்கள் (equivalence classes) எனக் காட்டுக.

b) $x, y \in \mathbb{N}$ என்க.

i. x இரட்டை மற்றும் y இரட்டை எனின், $x + y$ இரட்டை,

ii. x இரட்டை மற்றும் y இரட்டை எனின், xy இரட்டை எனவும் நிறுவுக.

4.

a) $f(x) = 4x + 5, x \in [1,2]$ என்க. f என்பது $[1,2]$ இலிருந்து $[9,13]$ ஆக உள்ள ஒரு இருவழிக் கோப்பு (bijection) எனக் காட்டுக.

b) விகிதமுறு எண்களின் தொடை $\mathbb{Q}$ எண்ணத்தக்கது (countable) எனக் காட்டுக.

c) α ஒரு அதீதமான எண் (transcendental number) என்க. $\frac{1}{\alpha}$ ஒரு அதீதமான எண் (transcendental number) எனக் காட்டுக.

5.

a) அனைத்து மெய் எண்களினதும் தொடை $\mathbb{R}$ ஆனது மேல் வரைப்புற்றது இல்லை (not bounded above) எனக் காட்டுக.

b) $(0,1)$ ஒரு தொடை என்க.

i. $(0,1)$ வரைப்புற்றது (bounded) எனக் காட்டுக.

ii. தொடை $(0,1)$ இற்கு ஒரு உயர்வு (maximum) இல்லை என நிறுவுக.

iii. $\inf(0,1) = 0$ எனக் காட்டுக.

c) x ஒரு விகிதமுறு (rational) எண் மற்றும் y ஒரு விகிதமுறா (irrational) எண் என்க. $x - y$ ஒரு விகிதமுறா (irrational) எண் எனக் காட்டுக.

6.

a) $n \in \mathbb{N}$ இற்கு $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ என்க.

i. ஒவ்வொரு $n \in \mathbb{N}$ இற்கும், n ஆவது பகுதிக் கூட்டுத்தொகை (n^{th} partial sum) $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ஐக் காண்க.

ii. தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஒருங்கும் (converges) மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2$ எனக் காட்டுக.

b) $n \in \mathbb{N}$ இற்கு $b_n = (-1)^{n+1}$ என்க. தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ விரியும் (diverges) எனக் காட்டுக.

c) தொடரி ஒன்றின் எல்லைக்கான வரைவிலக்கணத்தைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம், $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+3}{2n+1} = \frac{1}{2}$ என நிறுவுக.