00077

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
கணிதத் திணைக்களம்
விஞ்ஞானத்தில் உயர்சான்றிதழ் – மட்டம் 2
MYF2519 - இணைந்த கணிதம் I
இறுதிப் பரீட்சை **2025/2026**

திகதி:- 30-08-2025 நேரம்:- மு.ப. **9:30** இலிருந்து பி.ப. **12:30** வரை

பகுதி **A** இல் அனைத்து வினாக்களுக்கும் மற்றும் பகுதி **B** இல் ஐந்து வினாக்களுக்கும் விடையளிக்குக.

பகுதி A

1. சார்பு $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{(4-x^2)}}$ இன் ஆட்சியைக் காண்க.

2. சார்புகள் $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன $f(x) = 9x - 4;\ x \in \mathbb{R},$ மற்றும் $g(x) = x^3\ ;\ x \in \mathbb{R}\ ;$ இனால் வரையறுக்கப்படுகின்றன. பின்வருவனவற்றைக் காண்க:

   (a) $f \circ g$,
   (b) f^{-1},
   (c) $f^{-1} \circ g$.

3. பின்வரும் சமன்பாட்டை தீர்க்க, $5^{(2x+1)} - 5^{(x+2)} - 5^x + 5 = 0.$

4. பின்வரும் சமன்பாட்டை தீர்க்க, $\log_3 x - 2\log_x 3 = 1.$

5. பல்லுறுப்பிச் சார்பு $f(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + px + q$ (இங்கு p, q மாறிலிகளாகும்) ஐ $(x-1)$ மற்றும் $(x+1)$ ஆல் வகுத்தால் மிகுதி 5 மற்றும் 1 எனத் தரப்பட்டுள்ளது, p மற்றும் q இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

6. p ஆனது மெய் எண் எனத் தரப்பட்டுள்ளது. சமன்பாடு $x^2 + 2(p-3)x + 2p - 12 = 0$ இன் மூலங்கள் மெய் எனக் காட்டுக.

7. சமனிலி $\frac{5}{5x-1} > \frac{2}{2x+1}$ ஐ தீர்க்க.

8. $x - 2y + 3 = 0$ மற்றும் $4x - y + 2 = 0$ எனும் இரு நேர்கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளியின் ஊடாகவும் $x - y + 1 = 0$ என்னும் கோட்டிற்கு சமாந்தரமாகவும் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

9. $tan^{-1}\frac{120}{119} = 2sin^{-1}\frac{5}{13}$ எனக் காட்டுக.

10. $\tan\theta + \cot 2\theta = cosec 2\theta$ எனக் காட்டுக.

பகுதி B

11. (a) Let $f(x) = x^4 + ax^3 + 4x + b$ என்க, இங்கு $a, b, c \in \mathbb{R}$ ஆகும். (x^2+1) என்பது $f(x)$ இன் ஒரு காரணி எனின்,

(i) a மற்றும் b இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. மற்றும் மற்றைய இருபடிக் காரணியைக் காண்க.
(ii) இதிலிருந்து $(x^2+1)(x+4)$ ஆல் $f(x)$ வகுபடும் போது ஈவு மற்றும் மிகுதியைக் காண்க.

(b) அனைத்து $x \in \mathbb{R}$, க்கும் $9x = A(2x+1)(1-x) - B(1-x) + C(2x+1)^2$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது

A, B மற்றும் C ன் பெறுமானங்களைக் காண்க.
இதிலிருந்து $\frac{9x}{(2x+1)^2(1-x)}$ யை பகுதிப் பின்னங்களாக எழுதுக.

12. $p, q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$ என்க. $f(x) = x^2 - px + q$ என்க. $x = 0$ என்பது சமன்பாடு $f(x) = 0$ இன் ஒரு மூலம் இல்லை எனக் காட்டுக. α மற்றும் β என்பன $f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் என்க. $(\alpha + \beta)$ மற்றும் $\alpha\beta$ ஐ p, q இன் சார்பில் எழுதுக.

(a) $\alpha^2 + \frac{1}{\beta^2}$ மற்றும் $\beta^2 + \frac{1}{\alpha^2}$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்டு இருபடிச் சமன்பாடு $g(x) = q^2x^2 - (p^2 - 2q)(q^2+1)x + (q^2+1)^2 = 0$ எனக் காட்டுக.

(b) சமன்பாடு $g(x) = 0$ இன் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமன் எனின், $p = 0$ அல்லது $p^2 = 4q$ எனக் காட்டுக.

13. ஒரே வரிப்படத்தில் $f(x) = 2|x| - |x-2|$ மற்றும் $g(x) = 3|x-2|$ இன் வரைபை வரைக.

(i) இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக, சமனிலி $|x| > 2|x-2|$ ஐத் திருப்திப்படுத்தும் x இன் மெய் பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க.

(ii) பின்வரும் சமன்பாடு $2|x| - |x-2| = 3|x-\mu|$ ஆனது முடிவிலி தீர்வுகளை கொண்டிருப்பின் μ ன் பெறுமானம் அல்லது பெறுமானங்களைக் காண்க.

14. (a) யாதாயினும் முக்கோணம் ABC இற்கு சைன் விதியை மற்றும் கொசைன் விதியை எழுதுக.

வழமையான குறியீட்டுடன் பின்வருவனவற்றைக் காட்டுக.

(i) $a = (b-c)\cos\frac{A}{2}.\operatorname{cosec}\frac{(B-C)}{2}$,

(ii) $\cot\frac{(B-C)}{2} = \frac{(b+c)}{(b-c)}\tan\frac{A}{2}$, $B \neq C$.

(i) மற்றும் (ii) யை பயன்படுத்தி, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ எனக் காட்டுக.

(b) $\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ and $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\sin 2\theta + \cos 2\theta = 1$ ன் எல்லாத் தீர்வுகளையும் காண்க.

15. (a) $y = 4\cos x - 2$, இன் உயர்வு மற்றும் இழிவுப் பெறுமானங்களை எழுதுக, இங்கு $0 \le x \le 2\pi$ ஆகும்.

(b) $y = 4\cos x - 2$ இன் வரைபை வரைக, இங்கு $0 \le x \le 2\pi$ ஆகும்.

(c) $0 \le x \le \pi$ ஆக இருக்கும் போது, $y = 0$ மற்றும் $y = 4\cos x - 2$ ஐ திருப்திப்படுத்தும் அனைத்து மூலங்களையும் காண்க.

(d) மேலும் $y = |4\cos x - 2|$ இன் வரைபை அதே வரைபில் வரைக, இங்கு $0 \le x \le 2\pi$ ஆகும்.

(e) $0 \le x \le 2\pi$ ஆக இருக்கும் போது $y = 1$ மற்றும் $y = |4\cos x - 2|$ ஐ திருப்திப்படுத்தும் அனைத்து மூலங்களையும் எழுதுக.

16. புள்ளி $(x_0, \ y_0)$ இலிருந்து கோடு $ax + by + c = 0$ இற்கான செங்குத்துத் தூரம் $\frac{[ax_0+by_0+c]}{\sqrt{a^2+b^2}}$ எனக் காட்டுக.
இதிலிருந்து $ax + by + c = 0$ மற்றும் $ax + by + d = 0$ எனும் இரு கோடுகளுக்கிடையேயானத் தூரம் $\frac{|d-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ எனக் காட்டுக.

(a) புள்ளி $\left(\frac{4}{5}, -2\right)$ இலிருந்து கோடு $5x - 12y + 11 = 0$இற்கான செங்குத்துத் தூரத்தைக் காண்க.
அத்துடன் $5x - 12y + 11 = 0$ மற்றும் $5x - 12y + 24 = 0$ எனும் இரு கோடுகளுக்கிடையேயானத் தூரத்தை காண்க.

(b) புள்ளி $\left(\frac{2}{5}, -2\right)$இருந்து செங்குத்துத் தூரத்தின் இரு அலகிலும் மற்றும் நேர் கோடு $5x - 12y - 9 = 0$ இற்கு சமாந்தரமாகவும் இருக்கும் இரண்டு நேர் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

17. $y + \sqrt{5}x - \sqrt{5} = 0$ மற்றும் $y - \sqrt{5}x + \sqrt{5} = 0$ எனும் இரு கோடுகளை கருதுக. தரப்பட்ட இரண்டு கோடுகளின் மீது புள்ளி $P \equiv (1,0)$ இருக்கும் எனக் காட்டுக

(i) தரப்பட்டுள்ள இரண்டு நேர்கோடுகளுக்கும் இடையே உள்ள கூர்ங்கோணத்தின் கோண இருகூறாக்கியைக் காண்க.
(ii) கூர்ங்கோணத்தின் கோண இருகூறாக்கியின் மீது புள்ளி $Q \equiv (1, 1)$ இருக்கும் எனக் காட்டுக.
(iii) புள்ளி $A \equiv (-1, 0)$ இற்கு ஊடாக கூர்ங்கோணத்தின் கோண இருகூறாக்கிக்கு செங்குத்தாக இருக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
(iv) முக்கோணி PAQ ன் பரப்பளவைக் காண்க.