00082

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
கணிதத் திணைக்களம்
விஞ்ஞானத்தில் உயர்சான்றிதழ் மட்டம் **2**
MYF 2521– இணைந்த கணிதம் 3
இறுதிப் பரீட்சை **2025/2026**

திகதி:- 14-09-2025 நேரம்:- மு.ப 09.30 இலிருந்து பி.ப 12.30 வரை

பகுதி **A** இல் அனைத்து வினாக்களுக்கும் மற்றும் பகுதி **B** இல் ஐந்து வினாக்களுக்கும் விடையளிக்குக.

பகுதி A

1. கணித தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, அனைத்து நேர் முழு எண்கள் n இற்கும் $(10^n - 1)$ என்பது 9 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

2. பெருக்கல் விருத்தியில் 4 ஆவது 7ஆவது மற்றும் 10 ஆவது உறுப்புக்கள் l, m மற்றும் n ஆகும். $m^2 = nl$ எனக் காட்டுக.

3. $\left(2x + \frac{k}{2x}\right)^9$ இன் ஈருறுப்பு விரிவில் x^5 இன் குணகம் 128 ஆகும். k ன் பெறுமானத்தைக் காண்க இங்கு $k \in \mathbb{R}^+$.

4. 7 ஆண்கள் மற்றும் 5 பெண்கள் கொண்ட ஒரு குழுவில் இருந்து 5 உறுப்பினர்களைக் கொண்ட ஒரு விவாதக் குழு அமைக்கப்பட்டுள்ளது. எத்தனை முறையிகளில் இக்குழுக்களைக் உறுவாக்களாம் கீழே தரப்பட்டுள்ளவாறு

   (a) குழுவில் உள்ள யாராவது 5 நபர்களை கொண்டிருக்கும் .

   (b) ஆகக் குறைந்தது ஒரு ஆணை கொண்டிருக்கும்.

5. சிக்கலெண் w, $w = 1 + \sqrt{3}i$ ஐ மட்டு மற்றும் வீசல் வடிவத்தில் வெளிப்படுத்துக. இதிலிருந்து மொய்வரின் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி w^7 ஐ தெக்காட்டின் வடிவத்தில் காண்க.

6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ மற்றும் $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ எனின்,

   (i) AC யை காண்க.
   (ii) CA யை காண்க.

7. பின்வரும் எல்லைகளைத் துணிக.

(a) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+3x+7}{2x^2-5}$ (b) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x.\tan 9x}$

8. ஒரு வளையி $x = t(1-t)^2$மற்றும் $y = t^2(1-t)$ என்னும் பரமானச் சமன்பாடுகளால் தரப்படுகின்றது., t ஒரு பரமானம் ஆகும். $t = \frac{1}{2}$ இல் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

9. $\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx = ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ எனக் காட்டுக.

10. (1,-1), (2,0) மற்றும் (0,-1).எனும் புள்ளிகளின் ஊடாக செல்லும் வட்டத்தைக் காண்க.

PART B

11. $U_r = \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$ என்க. $U_r = \frac{A}{r} + \frac{B}{(r+1)} + \frac{C}{(r+2)}$ என ஆகுமாறு மெய் மாறிலிகள் A, B மற்றும் C இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$ எனக் காட்டுக.

முடிவிலித் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்கும் என ஊய்த்தறிக மற்றும் அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

12. (i) தாயம் A ஆனது $A = \begin{pmatrix} p & 1+2p \\ -1 & p-2 \end{pmatrix}$ இனால் தரப்படுகிறது. அனைத்து $p \in \mathbb{R}$ இற்கும் A^{-1} இருக்கும் எனக் காட்டுக.

$p = 3$ என்க. A மற்றும் A^{-1}யை எழுதுக.

மேற்கண்ட விளைவுகளை பயன்படுத்தி பின்வரும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை தீர்க்க.

$$3x + 7y = 8 \text{ மற்றும்}$$
$$-x + y = 4$$

(ii) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ஒரு 2x2 தாயம் என்க.

(a) $B^2 - B - 2I = \underset{\sim}{0}$ எனக் காட்டுக. இங்கு $\underset{\sim}{0}$ ஒரு 2x2சூனியத் தாயம் ஆகும். மேலும் I ஒரு 2x2 அலகு தாயம் ஆகும்.
(b) அத்துடன் $B^{-1} = \frac{1}{2}(B - I)$ எனக் காட்டுக. B^{-1}யை உய்த்தறிக.
(c) $B^4 = 5B + 6I$ எனக் காட்டுக.

13. (a) $z = x + iy$ என்க, ஒரு சிக்கலெண்ணாகும் இங்கு $x, y \in \mathbb{R}$ மற்றும் $\bar{z}$ ஆனது z ன் உடண்புணரி என்க.

(i) $|z|^2 = z\bar{z}$, and $z - \bar{z} = 2iIm(z)$ எனக் காட்டுக.

(ii) அதிலிருந்து பின்வருவனவற்றை காட்டுக,

$|z-5i|^2 = |z|^2 - 10Im(z) + 25$ மற்றும்

$|1+5iz|^2 = 25|z|^2 - 10Im(z) + 1.$

$|z-5i|^2 = |1+5iz|^2$ எனின் , $|z| = 1$ என உய்த்தரிக.

(d) $\left(\frac{5-i}{2-3i}\right)$ எனும் சிக்கலெண்ணை $\lambda(1+i)$ எனும் வடிவத்தில் எழுதழாம் எனக் காட்டுக. இங்கு λ மெய் ஆகும். λ ன் பெறுமானத்தை காண்க. இதிலிருந்து $\left(\frac{5-i}{2-3i}\right)^6$ ஒரு கற்பனை பகுதி எனக் காட்டுக அத்துடன் அதன் பெறுமானத்தையும் காண்க.

14. (a) பின்வரும் சார்புகளை x குறித்து வகையிடுக.

(i) $y = (1-4x)^2(3x^2+1)^4$

(ii) $y = \sqrt{\frac{1-cosx}{1+cosx}}$

(iii) $y = \ln|1 + 2e^x + 3e^{-x}|$

(iv) $y = (1-4x^2).\sin^{-1} 2x$

(b) கனவளவு $1024\pi\ cm^3$ ஆக இருக்குமாறு ஒரு மூடிய செவ்வட்ட உருளையை உருவாக்க வேண்டும். அதன் மொத்த மேற்பரப்பளவை குறைந்தபட்சமாக மாற்றும் உருளையின் ஆரையைக் காண்க.

15. (a) $f(x) = \frac{(x^2+1)}{(x^2-1)}, x \neq -1, 1$ என்க. $f(x)$ இன் வகையிடு $f'(x)$, $x \neq -1,1$ இற்கு

$f'(x) = \frac{-4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$ இனால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $f(x)$ அதிகரிக்கும் மற்றும் $f(x)$ குறைவடையும் ஆயிடையைக் காண்க. $f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளிகள், நிலைக்குத்து மற்றும் கிடை அணுகுகோடுகள் என்பவற்றைக் காண்க மற்றும் $f(x)$ இன் வரைபை வரைக.

(b) $-1 \leq x \leq 1$ வீச்சில் உள்ள வளையி $y = \sqrt{1+x^2}$ இன் பகுதியை x–அச்சு பற்றி 2π கோணத்தில் சுழற்றும்போது உருவாகும் கனவளவு $\frac{8\pi}{3}$ எனக் காட்டுக.

16. (a) $\frac{4x-1}{(2x+1)(3x-2)}$ ஐ பகுதிப் பின்னங்களாக வெளிப்படுத்துக மற்றும் இதிலிருந்து $\int \frac{4x-1}{(2x+1)(3x-2)}dx$ஐ துணிக.

(b) பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x.cos2xdx = \frac{1}{8}(\pi - 2)$ எனக் காட்டுக.

(c) வளையிகள் $y = x^2 + 8$, $x = 3$,$x = 6$ மற்றும் x அச்சு என்பவற்றால் உள்ளடைக்கப்பட்ட பகுதியின் பரப்பளவு 87 சதுர அலகுகள் எனக் காட்டுக.

17. $S_1 = 0$ மற்றும் $S_2 = 0$ வட்டங்களைக் கருதுக, இங்கு
$S_1 \equiv x^2 + y^2 - 4x - y + 3 = 0$ மற்றும்
$S_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x + 6y + k = 0$. இங்கு $k\epsilon\mathbb{R}$ ஆகும்.

(i) இரண்டு வட்டங்களும் செங்கோணத்தில் இடைவெட்டும் எனின். k ன் பெறுமானத்தை காண்க.

(ii) $S_1 = 0$ மற்றும் $S_2 = 0$ எனும் இரு வட்டங்களின் மையம் மற்றும் ஆரையை எழுதுக.

(iii) மையம் மற்றும் இரண்டு வட்டங்கள் $S_1 = 0$ மற்றும் $S_2 = 0$ இடைவெட்டும் புள்ளிகளின் ஊடாகவும் செல்லும் வட்டம் $S_3 = 0$ ன் சமன்பாட்டைக் காண்க. $S_3 = 0$ ன் மையம் மற்றும் ஆரையை எழுதுக.

(iv) $S_1 = 0$ எனும் வட்டத்தின் மீது இருக்கும் (1,1) எனும் புள்ளியின் ஊடாக செல்லும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.