இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
விஞ்ஞானமாணி /கல்விமாணி பட்டப்பாடநெறி
பிரயோக கணிதம் - மட்டம் 03
ADU3300 – காவி அட்சரகணிதம்
இறுதிப் பரீட்சை - 2025/2026
காலம் – இரு மணித்தியாலங்கள்

நாள்: 02.12.2025 நேரம் : பி.ப 01.30 – பி.ப 03.30

பொதுவான அறிவுறுத்தல்கள்.

- இந்த வினா பத்திரம் பகுதி A மற்றும் பகுதி B என **இரண்டு** பகுதிகளைக் கொண்டுள்ளது, பகுதி A **கட்டாயமானது**. இது ஒரு கட்டுரைவினாவைக் கொண்டுள்ளது.
- பகுதி B ஐந்து கட்டுரை வினாக்களைக் கொண்டுள்ளது அதில் **மூன்று** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடையளிக்குக.

பகுதி A

அனைத்து வினாக்களுக்கும் விடையளிக்குக.

1.(a) $\underline{u}, \underline{v}$ மற்றும் $\underline{w}$ என்னும் காவிகள் ஏகபரிமான முறையை சாராத காவிகள் என காட்டுக, இங்கு $\underline{u}=2\underline{i}-\underline{j}, \underline{v}=\underline{j}+3\underline{k}$ மற்றும் $\underline{w}=\underline{i}+\underline{j}$ ஆகும்.

(b) $\underline{u}$ மற்றும் $\underline{v}$ என்பன செங்குத்தான அலகுக் காவிகள் எனின், யாதாயினும் எண்ணி m, n இற்கு $|m\underline{u}+n\underline{v}| = \sqrt{m^2+n^2}$ எனக் காட்டுக.

(c) A(1, -2, 4) என்னும் புள்ளியின் ஊடாகவும் $2\underline{i}-\underline{j}+3\underline{k}$ என்னும் காவிக்கு செவ்வனாகவும் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(d) $\lim_{t\to 1}\left[\frac{t^3-1}{t-1}\underline{i}+\frac{t^2-3t+2}{t^2+t-2}\underline{j}+(t^2+1)e^{t-1}\underline{k}\right]$ என்னும் காவிச் சார்பின் எல்லையினைக் காண்க.

(e) $4\underline{i}+2\underline{j}$ என்னும் தானக் காவியை மையமாகக் கொண்ட முறையே 12 மற்றும் 8 என்னும் நீளங்களுள்ள பேரியச்சு மற்றும் சிறியச்சுக்களைக் கொண்ட ஆள்கூற்று அச்சுக்களுக்கு சமாந்தரமான அச்சுக்களைக் கொண்ட நீள்வட்டத்தின் தெக்காட்டியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

பகுதி B

மூன்று வினாக்களுக்கு **மாத்திரம்** விடையளிக்குக.

2. (a) $\underline{a}=(1, 4, 2)$, $\underline{b}=(3, -1, 5)$ மற்றும் $\underline{c}=(2, 2, -3)$ என்னும் காவிகள் தரப்பட்டுள்ளன.

$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = (\underline{a}\cdot\underline{c})\underline{b} - (\underline{a}\cdot\underline{b})\underline{c}$ என்னும் காவியின் மும்மை பெருக்கச்சர்வசமன்பாட்டை வாய்ப்புப் பார்க்க.

(b) தரப்பட்டுள்ள காவிகள் $\underline{a}$, $\underline{b}$ மற்றும் $\underline{c}$ இற்கு $\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = (\underline{a}\cdot\underline{c})\underline{b} - (\underline{a}\cdot\underline{b})\underline{c}$ என்னும் முடிவை பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றைக் காட்டுக:

i) $\underline{i}\times(\underline{a}\times\underline{i}) + \underline{j}\times(\underline{a}\times\underline{j}) + \underline{k}\times(\underline{a}\times\underline{k}) = 2\underline{a}$,

ii) $(\underline{a}\times\underline{b})\cdot(\underline{c}\times\underline{d}) = (\underline{b}\cdot\underline{d})(\underline{a}\cdot\underline{c}) - (\underline{b}\cdot\underline{c})(\underline{a}\cdot\underline{d})$,

iii) $(\underline{a}\times\underline{b})\cdot[(\underline{b}\times\underline{c})\times(\underline{c}\times\underline{a})] = [\underline{a}\ \ \underline{b}\ \ \underline{c}]^2$ என்பதை உய்த்தறிக.

3. (a) $A\,(0, 3, -2)$ என்னும் புள்ளியின் ஊடாகவும் $B\,(1, 2, 4)$, $C\,(-3, 5, 0)$ என்னும் புள்ளிகளின் ஊடாக செல்லும் நேர்கோட்டிற்கு சமாந்தரமாகவும் செல்லும் நேர்கோட்டின் தெக்காட்டியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. $D\,(-4, 6, -6)$ என்னும் புள்ளியானது இந் நேர்கோட்டில் உள்ளது என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

(b) l_1 மற்றும் l_2 என்னும் நேர் கோடுகள் முறையே $\underline{r} = 2\underline{i} + \underline{j} + 3\underline{k} + \lambda(3\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k})$ மற்றும் $\underline{r} = 9\underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k} + \mu(\underline{i} + 2\underline{j} - 3\underline{k})$ என்பவற்றால் தரப்படுகின்றன.

i) இரண்ட நேர்கோடுகளும் இடைவெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.
ii) $\lambda = 1$ ஆகும்போது புள்ளி A ஆனது l_1 மீதும் $\mu = 1$ ஆகும்போது புள்ளி B ஆனது l_2 மீதும் இருக்கும். A மற்றும் B இனூடாக செல்லும் நேர்கோடு l_3 இன் காவிச் சமன்பாட்டைப் பெறுக.

4. (a) $\underline{a} = (1, 2, 3)$, $\underline{b} = (4, -1, 2)$ மற்றும் $\underline{c} = (0, 5, 1)$ என்னும் காவிகளால் உருவாக்கப்பட்ட இணைகரப்பரவையின் கனவளவைக் காண்க.

(b)

i) $x + y + z = 6$ மற்றும் $3x - 17y + 2z = 0$ ஆகிய தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

ii) $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{2}$ என்னும் நேர்கோட்டை கொண்டதும் மற்றும் $\frac{x+2}{6}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+1}{3}$ என்னும் நேர்கோட்டுக்கு சமாந்தரமுமான தளத்தின் தெக்காட்டியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

5. (a)

i) ஒரு துணிக்கையானது $x = 3\cos 3t,\ y = 3 \sin 3t,\ z = 2e^{-3t}$ என்னும் பரமான சமன்பாடுகளைக் கொண்ட ஒரு வளையினூடாக நகருகின்றது, இங்கு t ஆனது நேரமாகும். நேரம் t இல் வேகத்தைக் கணிக்க. இதிலிருந்து $t=0$ இல் கதி மற்றும் அமர்முடுகல் காவி என்பவற்றைக் காண்க.

ii) $\underline{a}, \underline{b}$ என்பன மாறா காவிகள் மற்றும் ω ஒரு மாறா எண்ணி என்க. காவி $\underline{r}(t) = \cos \omega t\ \underline{a} + \sin \omega t\ \underline{b}$ இற்கு $\underline{r} \times \frac{dr}{dt} = \omega\ \underline{a} \times \underline{b}$ எனக் காட்டுக.

(b) ஒரு துணிக்கை ஆனது புள்ளி $(0,0)$ இலிருந்து $(2,8)$ வரை பரவளையி $y = 2x^2$ இனூடாக நகருகின்றது. விசைப்புலம் $\underline{F} = 2y\underline{i} + 3x\underline{j}$ ஆகும். இந்த பாதையின் வழியே துணிக்கை மீது $\underline{F}$ இனால் செய்யப்பட்ட வேலையைக் காண்க.

6. (a) வட்டத்தின் பரமான சமன்பாடு

$$\underline{r}(\theta) = (3a + 3a\cos\theta)\underline{i} + 3a\sin\theta\ \underline{j}$$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

i) இந்த பரமான சமன்பாடானது $(3a, 0)$ இனை மையமாகவும் $3a$ இனை ஆரையும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தை வகைக் குறிக்கிறது என நிறுவுக.

ii) $\theta = \frac{\pi}{4}$ ஆகும் போது வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைத் துணிக

iii) $(5a, \sqrt{5}a)$ என்னும் புள்ளியானது வட்டத்தின் மீது உள்ளதா என வாய்ப்புப் பார்க்க.

(b) $\underline{r}(t) = 2\cos t\ \underline{i} + 2\sin t\ \underline{j} + t\underline{k}$ என்பது ஒரு வெளி வளையி என்க.

i) அலகு தொடலி காவியினை காண்க.

ii) தலைமை செவ்வன் காவி மற்றும் வளையியின் வளைவு (curvature) என்பவற்றைக் காண்க.

****