இலங்கைத் திறந்த பல்கலைக்கழகம்

தொழில்நுட்பவியலில் டிப்ளோமா - அடிப்படை மட்டம் 01

இறுதிப் பரீட்சை 2007

MPZ 1330 - தூயகணிதம் II

072

காலம் - மூன்று (03) மணித்தியாலங்கள்.

திகதி : 24 ஏப்ரல் 2008 நேரம் : 09:30 - 12:30

ஒவ்வொரு பகுதியில் இருந்தும் ஆகக்குறைந்தது ஒரு வினாவை தெரிவு செய்து அல்லாமாக ஆறு வினாக்களுக்கு விடையளிக்க.

கணிப்பான் பாவிக்கலாம்.

பகுதி A

01.

a) $(x^2+4y^2)^2 - 64x^2y^2 \equiv x^4 - 56x^2y^2 + 4y^4$; என்பது சர்வசமன்பாடு என உறுதிப்படுத்துக.

இதிலிருந்து $x^4 - 56x^2y^2 + 4y^4$ கின் காரணிகளைக் காண்க.

$x^4 - 56x^2y^2 + 4y^4 = -1679$

$x^2 + 4y^2 + 8xy = 73$ எனத் தரப்படின், மேலுள்ள காரணிகளைப் பயன்படுத்தி $x^2 + 4y^2 - 8xy$ கின் பெறுமானத்தைக் காண்க. மேலும் $x^2 + 4y^2$, xy என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$(x+2y)^2$, $(x-2y)^2$ என்பவற்றை விரித்து பெறுமானம் காண்க.

மேலும், மேலுள்ள முடிவுகளில் இருந்து x, y கின் பெறுமானங்களைக் காண்க. இங்கு $x>y$, $x>0$, $y>0$ ஆகும்.

b) $\sqrt{5-2x} + \sqrt{15+3x} = \sqrt{26-5x}$ இணைத் தீர்த்து x ஐக் காண்க.

c) பின்வரும் ஒருங்கமை சமன்பாட்டிணை தீர்க்க.

$$2x + 3y + 4z = 28$$
$$5y - x + 3z = 19$$
$$2y + x - z = 3$$

02.

a) $p^x = y \iff \log_p y = x$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

மேலுள்ள வரைவிலக்கணத்தைப் பயன்படுத்தி

$$\log_x y \cdot \log_y x = 1$$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\log_8 2008 = \dfrac{1}{\log_{2008} 8}$ எனக் காட்டுக.

மேலும்

$$\frac{1}{\log_8 2008} + \frac{1}{\log_{251} 2008}$$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

b) $4 \cdot 4^{2x} - 65 \cdot 4^x + 16 = 0$

$4^x = t$ இணைப் பிரதியிட்டு

$4t^2 - 65t + 16 = 0$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $x = -1$ OR 2 எனக்காட்டுக.

c) சுருக்குக. (கணிப்பான், மடக்கை அட்டவணை என்பவற்றை பயன் படுத்தாது)

$$\log \frac{133}{65} + 2\log \frac{13}{7} - \log \frac{143}{90} + \log \frac{77}{171}$$

03.

a) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 - c^2 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய் என நிறுவுக. இங்கு a, b, c என்பன மெய் எண்கள்

b) λ கின் எப்பெறுமானத்துக்கும்,

$$x^2 - 2(1+3\lambda)x + 7(3+2\lambda) = 0$$ எனும் சமன்பாடு மொத்தும் தீர்வுகளைக் கொண்டிருக்கும்.

c) $3x^2 + 4x - 5 = 0$ கின் மூலங்கள் α, β எனின்

I $(3\alpha+4)^{-2} + (3\beta+4)^{-2}$

II $(3\alpha+4)^3 + (3\beta+4)^3$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

பகுதி B

04.

a) $\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$ இற்கான கோவையை எழுதுக.

$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

(i) இதிலிருந்து $\sin 75 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ எனக் காட்டுக.

(ii) $\sin\theta = \frac{24}{25}$, $\cos\phi = \frac{12}{13}$ ஆகுமாறு θ, ϕ என்பன கூர்ங்கோணங்களாகும்.

அட்டவணைகளையோ, கணிப்பானையோ பயன்படுத்தாது $\sin(\theta+\phi)$, $\cos(\theta+\phi)$ என்பவற்றின் மிகச் சரியான பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து $\frac{\pi}{2} < \theta + \phi < \pi$ எனக் காட்டுக.

b) 10cm, 12cm ஆரையுள்ள வட்டங்களின் மையங்கள் முறையே C_1, C_2 ஆகும். C_1, C_2 இற்கான இடைதூரம் 14cm ஆகும்.

கீழேயுள்ள படத்தைக் கருத்தில் கொண்டு, பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\sin\theta = \frac{5}{6}\sin\phi$

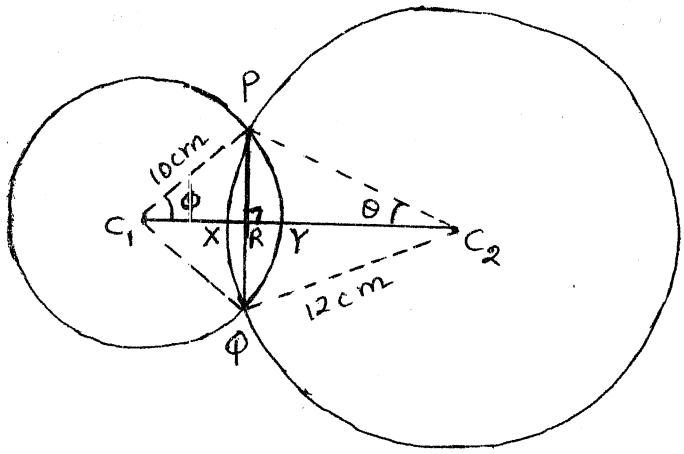
(ii) $PR = 10\sin\phi$, $RC_2 = (14 - 10\cos\phi)$

(iii) $\cos\phi = 0.5429$, $\phi = 0.997$ rad

(iv) $\sin\theta = 0.6999$, $\theta = 0.775$ rad

பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(v) முக்கோணி PC_2Q இன் பரப்பு
(vi) முக்கோணி PC_1Q இன் பரப்பு
(vii) $PXQC_2$ எனும் பகுதியின் பரப்பு
(viii) $PYQC_2$ எனும் பகுதியின் பரப்பு
(ix) இரு வட்டங்களுக்கும் பொதுவான பகுதியின் பரப்பு



05.

a) பின்வரும் சர்வசமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $\frac{\cot\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} - \frac{\cot\theta}{1-\operatorname{cosec}\theta} \equiv 2\sec\theta$

(ii) $(1+\tan\theta)^2 + (1-\tan\theta)^2 \equiv 2\sec^2\theta$

(iii) $\frac{\cos\theta + \cot\theta}{\tan\theta + \sec\theta} \equiv \cos\theta\cot\theta$

(iv) $(1+\sec\theta+\tan\theta)(1+\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta) \equiv 2(1+\tan\theta + \cot\theta+\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta)$

(v) $\frac{\cot\alpha + \tan\beta}{\cot\beta + \tan\alpha} \equiv \cot\alpha\tan\beta$

b) $k = \tan 25^\circ$ எனின் $\frac{\tan 205^\circ - \tan 115^\circ}{\tan 245^\circ + \tan 335^\circ}$ இனை k இல் எழுத்துரைக்க.

06.

a) $y = \cos x$ இன் வரையை படம்படியாக வரைக.
இங்கு $0 \leq x \leq 2\pi$
இதிலிருந்து $y = 3\cos 2x$ இன் வரையை படம்படியாக வரைக. இங்கு $-\pi \leq x \leq \pi$
$y = 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + 1$ இன் வரையை வரைக.
இங்கு $-\pi \leq x \leq \pi$. வரையின் உயர்வு, கிழிவுப் புள்ளிகளை குறிக்க. அத்துடன் உயர்வு, கிழிவுப் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

b) நேர்கோடு DE ஆனது, முக்கோணி ABC கின் அடி BC கிற்கு சமாந்தரமாகும். அந்நுடன் AB, AC ஐ முறையே D, E கில் வெட்டுகிறது. D கின் ஊடாகச் செல்லும் ஒர் வட்டமானது AC ஐ E கில் தொடுகிறது. அத்துடன் AB ஐ F கில் சந்திக்கிறது எனின் F, E, C, B என்பன அவ்வட்டத்தில் அமைந்துள்ளன எனக் காட்டுக.

பகுதி C

07.

a) பின்வருவனவற்றின் எல்லைகளைக் காண்க.

I) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^{1/3} - 1}{(1+x)^{1/2} - 1}$ II) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan x - \sin x}{x(1-\cos x)}$

b) பின்வருவனவற்றின் x குறித்த வகையீட்டுக் குணகத்தைக் காண்க.

I) $y = \cos^{-1}\left(\dfrac{4+5\cos x}{5+4\cos x}\right)$ II) $y = \sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

c) $y = ae^{mx} + be^{-mx}$ எனின் $\dfrac{d^2y}{dx^2} - m^2y = 0$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\dfrac{dy_1}{dx}$, $\dfrac{d^2y_1}{dx^2}$ என்பவற்றை காணிக்க.

இங்கு $y_1 = -ae^{-mx} + be^{mx}$

8.

$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$ எனத் தரப்படின் $\frac{dy}{dx} = 0$

ஆகும்போது x கின் பெறுமானங்களைக் காண்க.
மேலும் இதிலிருந்து y கிற்கான நிலையான பெறுமதிகளின் இயல்புகளை காண்க.
$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$ கின் வரைபை பரும்படியாக வரைக. இங்கு $f(-0.95) = 0$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

இதிலிருந்து பின்வரும் வளையிகளின் வரைபை தருவிக்குக.

a) $y = g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x - 15$

b) $y = h(x) = \frac{1}{x^3 - 6x^2 + 9x + 15}$

c) $y = k(x) = (x-1)^3 - 6(x-1)^2 + 9(x-1) + 15$

9.

a) பின்வருவனவற்றை x குறித்து தொகையிடுக.

(i) $\int \cos 8x \sin 6x \, dx$ (ii) $\int \cos^3 x \sin^5 x \, dx$

(iii) $\int \frac{dx}{(x+4)^2 + 3^2}$ (iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{5^2 - (x-1)^2}}$

b) பின்வரும் தொகையீடுகளைக் காண்க.

(i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx$ (ii) $\int_0^{3} \sqrt{a-x^2}\, dx$

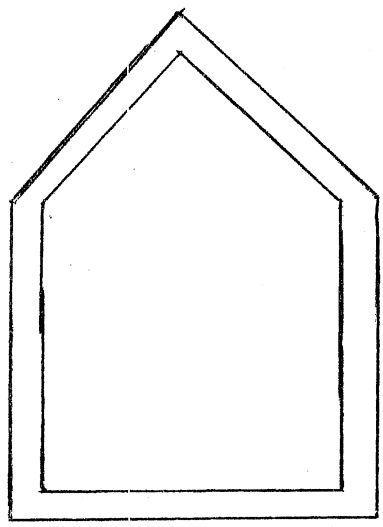
(iii) $\int_0^{\pi/3} \frac{-\sin x + 7\cos x - 5}{4\cos x + 3\sin x - 5}\, dx$

c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}$ எனக்காட்டுக.

10.

a) $y^2 = 8x$, $x^2 = 8y$ எனும் இரு வளையிகளாலும் அடைக்கப்பட்ட பகுதியினை பரும்படியாக வரைந்து அதன் பரப்பளவினைக் காண்க.

c) யன்னல் ஒன்றின் ஒர்பகுதியானது செவ்வகம் மற்றும் சமபக்க முக்கோணி எனும் வடிவங்களால் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது அதன் சுற்றளவு 16m எனத்தரப்பட்டுள்ளது எனின் உயர் வெளிச்சத்தை உட்புக விடுவதற்கு யன்னலின் அகலத்தைக் காண்



—பதிப்புரிமையுடையது—