ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාවේදී/ අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව
අවසාන පරීක්ෂණය - **2017/2018**
ශුද්ධ ගණිතය - තුන්වන මට්ටම
PUU1140/ PEU3300 - ගණිත තර්කනය හා ගණිත සාධනය

කාලය පැය දෙකයි.

දිනය : - 2018.10.01 වේලාව : - පෙ.ව. 9.30 – පෙ.ව. 11.30 දක්වා

ප්‍රශ්න හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

සටහන: ප්‍රශ්නය පත්‍රය පුරාවට සාධනයකින් තොරව $\sqrt{2}$ අපරිමේය සංඛ්‍යාවක් බව ඔබට උපකල්පනය කළ හැක.

1. (a) පහත සඳහන් එක් එක් ප්‍රකාශයේ ප්‍රතිශේධය ලියන්න. එක් එක් ප්‍රකාශය සාධනය කරන්න. $m, n \in \mathbb{N}$ බව උපකල්පනය කරන්න.

   (i) mn ඉරට්ටේ නම් එවිට m ඉරට්ටේ හෝ n ඉරට්ටේ වේ.
   (ii) $2 < m - n < 4$ නම් එවිට $15 \leq m^2 - n^2 \leq 3(2n + 3)$ වේ.

   (b) පහත සඳහන් එක් එක් ප්‍රකාශය සාධනය කරන්න.

   (i) x, y ධන තාත්වික සංඛ්‍යා සඳහා $x \neq y$ නම් එවිට $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$ වේ.
   (ii) $m, n \in \mathbb{N}$ සඳහා, $m + 2n$, 3 හි ගුණාකාරයක් වේ නම් එවිට $2m + n$ ද, 3 හි ගුණාකාරයකි.

2. (a) පහත සඳහන් එක් එක් ප්‍රකාශයේ නිශේධය ලියන්න. පහත එක් එක් ප්‍රකාශය සාධනය කරන්න. $\gamma \in \mathbb{R}$ බව උපකල්පනය කරන්න.

   (i) $\gamma + \sqrt{2}$ පරිමේය සංඛ්‍යාවක් නම් එවිට $\gamma - 2$ අපරිමේය සංඛ්‍යාවකි.
   (ii) $\gamma + \sqrt{2}$ අපරිමේය සංඛ්‍යාවක් හෝ $\gamma - \sqrt{2}$ අපරිමේය සංඛ්‍යාවක් වේ.
   (iii) $r\sqrt{2}$ පරිමේය හෝ $r + \sqrt{2}$ පරිමේය වන පරිදි r නම් නිශ්ශූන්‍ය තාත්වික සංඛ්‍යාවක් පවතී.

   (b) p සහ q යනු ප්‍රකාශ දෙකකි. සත්‍ය වගු හෝ ඊට සමාන ක්‍රම භාවිතා නොකර පහත සඳහන් එක් එක් ප්‍රකාශ සාධනය කරන්න.

   (i) $p \vee q$ තාර්කිකව තුල්‍ය වේ. $(not\ p) \Rightarrow q$ ට.
   (ii) $p \wedge q$ තාර්කිකව තුල්‍ය වේ. $not[\ p \Rightarrow (notq)]$ ට.

3. (a) $\langle x_n \rangle$ යනු $x_1 = 3,\ x_2 = 21$ සහ එක් එක් $n \in \mathbb{N}$ සඳහා $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 0$ වන පරිදි වූ තාත්වික අනුක්‍රමයකි. එක් එක් $n \in \mathbb{N}$ සඳහා $x_n = 5^n - 2^n$ බව සාධනය කරන්න.

(b) එක් එක් $m \in \mathbb{N}$ සඳහා, පවතී $n \in \mathbb{N}$ කෙසේද යත් $n > m$ වන සේ සහ $10n + 1$ ප්‍රථමක නොවන පරිදි, යන්න සාධනය කරන්න.

(c) එක් එක් $m, n \in \mathbb{N}$ සඳහා $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ පරිමේය නම් එවිට $\sqrt{m}$ පරිමේය සහ $\sqrt{n}$ පරිමේය බව සාධනය කරන්න.

4. පහත සඳහන් එක් එක් ප්‍රකාශය සත්‍ය ද අසත්‍ය ද යන බව ප්‍රකාශ කරන්න. ඔබේ පිළිතුර ඔප්පු කර දක්වන්න.

(a) එක් එක් $m \in \mathbb{N}$ සඳහා, පවතී $n \in \mathbb{N}$, කෙසේද යත් $m + n$ ප්‍රථමක නොවන පරිදි.
(b) පවතී $m \in \mathbb{N}$, කෙසේද යත් ඕනෑම $n \in \mathbb{N}$ සඳහා $m + n$ ප්‍රථමක නොවන පරිදි.
(c) එක් එක් $m \in \mathbb{N}$ සඳහා, පවතී $n \in \mathbb{N}$, කෙසේද යත් $m + n$ ප්‍රථමක වන පරිදි.
(d) පවතී $m \in \mathbb{N}$, කෙසේද යත් එක් එක් $n \in \mathbb{N}$ සඳහා $m + n$ ප්‍රථමක වන පරිදි.

5. පහත සඳහන් එක් එක් ප්‍රකාශ සාධනය හෝ නිසාධනය කරන්න.

(a) එක් එක් $m \in \mathbb{Z}$ සඳහා, m යනු 3හි ගුණාකාරයක් හෝ m යනු 2 ගුණාකාරයක් වේ.
(b) එක් එක් $m \in \mathbb{Z}$ සඳහා, $(m^2 - 1)$ 3හි ගුණාකාරයක් හෝ m^2 යනු 3හි ගුණාකාරයක් වේ.
(c) පවතී $m \in \mathbb{N}$, කෙසේද යත් $\frac{3m+1}{2m+1} < \frac{13}{10}$ වන පරිදි.
(d) පවතී $m \in \mathbb{N}$, කෙසේද යත් සියළු $n \geq m$ සඳහා $\frac{3n+1}{2n+1} - \frac{3}{2} < \frac{1}{2018}$ වන පරිදි.

6. (a) $p, q \in \mathbb{Z}$ ලෙස ගන්න. $\frac{p^2+q^2}{4}$ නිඛිලයක් නම් හා නම්ම පමණක් p ඉරට්ටේ සහ q ඉරට්ටේ වන බව සාධනය කරන්න.

(b) m යනු ධන ඔත්තේ සංඛ්‍යාවකි. $\sqrt{2m}$ අපරිමේය බව සාධනය කරන්න.

(c) p ඉරට්ටේ, q ඔත්තේ සහ $\sqrt{\frac{p^2+q^2}{2}} \in \mathbb{Q}$ වන පරිදි $p, q \in \mathbb{Z}$ පවතී ද? ඔබේ පිළිතුර පැහැදිලි කරන්න.

The Open University of Sri Lanka
B.Sc. Degree Programme
Final Examination - 2017/2018
Pure Mathematics - Level 03
PUU1140/PEU 3300–Mathematical Logic &Mathematical Proofs

Duration: - Two hours

Date: - 01-10-2018 **Time: - 9:30a.m. –11:30a.m.**

Answer 4 questions only.

Note: Throughout the paper, without proof, you can assume that $\sqrt{2}$ is an irrational number.

1. (a) Write down the contraposition of each of the following statements. Prove each of the following statements. Assume that $m, n \in \mathbb{N}$.

(i) If mn is even then m is even or n is even.

(ii) If $2 < m - n < 4$ then $15 \leq m^2 - n^2 \leq 3(2n + 3)$.

(b) Prove each of the following statements.

(i) For all positive real numbers x and y, if $x \neq y$ then $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$.

(ii) For $n \in \mathbb{N}$, if $m + 2n$ is a multiple of 3 then $2m + n$ is a multiple of 3.

2. (a) Write down the negation of each of the following statements. Do not place the phrase "It is not the case that" or the word "Not" in front of the statements. Prove each of the following statements. Assume that $\gamma \in \mathbb{R}$.

(i) If $\gamma + \sqrt{2}$ is a rational number then $\gamma - 2$ is an irrational number.

(ii) $\gamma + \sqrt{2}$ is an irrational number or $\gamma - \sqrt{2}$ is an irrational number.

(iii) There exists a non-zero real number r such that $r\sqrt{2}$ is a rational number and $r + \sqrt{2}$ is a rational number.

(b) Let p and q be statements. Without using truth tables or equivalent methods, prove each of the following statements.

(i) $p \vee q$ is logically equivalent to $(not\ p) \Rightarrow q$.

(ii) $p \wedge q$ is logically equivalent to $not[p \Rightarrow (notq)]$.

3. (a) Let $\langle x_n \rangle$ be a sequence of real numbers that satisfies $x_1 = 3,\ x_2 = 21$ and for each $n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 0$. Prove that for each $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 5^n - 2^n$.

(b) Prove that for each $m \in \mathbb{N}$, there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $n > m$ and $10n + 1$ is not prime.

(c) Prove that for each $m, n \in \mathbb{N}$, if $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ is rational then $\sqrt{m}$ is rational and $\sqrt{n}$ is rational

4. For each of the following statements, state whether it is true or false and prove your answer.

(a) For each $m \in \mathbb{N}$, there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $m + n$ is not prime.

(b) There exists $m \in \mathbb{N}$ such that for each $n \in \mathbb{N}$, $m + n$ is not prime.

(c) For each $m \in \mathbb{N}$, there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $m + n$ is prime.

(d) There exists $m \in \mathbb{N}$ such that for each $n \in \mathbb{N}$, $m + n$ is prime.

5. Prove or disprove each of the following statements.

(a) For each $m \in \mathbb{Z}$, m is a multiple of 3 or m is a multiple of 2.

(b) For each $m \in \mathbb{Z}$, $(m^2 - 1)$ is a multiple of 3 or m^2 is a multiple of 3.

(c) There exists $m \in \mathbb{N}$ such that $\frac{3m+1}{2m+1} < \frac{13}{10}$.

(d) There exists $m \in \mathbb{N}$ such that $\frac{3n+1}{2n+1} - \frac{3}{2} < \frac{1}{2018}$ for each $n \geq m$.

6. (a) Let $p, q \in \mathbb{Z}$. Prove that $\frac{p^2+q^2}{4}$ is an integer if and only if p is even and q is even.

(b) Let m be an odd positive integer. Prove that $\sqrt{2m}$ is irrational.

(c) Does there exist $p, q \in \mathbb{Z}$ such that p is even , q is odd and $\sqrt{\frac{p^2+q^2}{2}} \in \mathbb{Q}$? Justify your answer.

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
விஞ்ஞானமானி பட்டப் பாடநெறி
இறுதிப் பரீட்சை – 2017/2018
தூய கணிதம் – மட்டம் 03
PUU4/PEU3300 – கனித தர்க்கவியலும் கணித நிறுவல்களும்

காலம் :- இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

நாள் :- 01-10-2018 நேரம் :- மு.ப 9.30 – மு.ப 11.30

நான்கு வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

குறிப்பு: இவ்வினாபத்திரத்தில், நிறுவல் இல்லாமல், $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறா எண் என்று நீங்கள் கருதிக் கொள்ளலாம்.

1. (a) பின்வரும் ஒவ்வொரு கூற்றுக்களினதும் எதிர்வைப்பை எழுதுக. பின்வரும் ஒவ்வொரு கூற்றுக்களையும் நிறுவுக. $m, n \in \mathbb{N}$ எனக் கொள்க.

(i) mn இரட்டை எனின் m இரட்டை அல்லது n இரட்டை ஆகும்.

(ii) $2 < m - n < 4$ எனின் $15 \leq m^2 - n^2 \leq 3(2n+3)$ ஆகும்.

(b) பின்வரும் ஒவ்வொரு கூற்றுக்களையும் நிறுவுக.

(i) எல்லா நேர் நிறை எண்கள் x மற்றும் y களுக்கு, $x \neq y$ எனின் $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$ ஆகும்.

(ii) $n \in \mathbb{N}$ இற்கு, $m + 2n$ என்பது மூன்றின் ஒரு மடங்கு எனின் $2m + n$ என்பது மூன்றின் ஒரு மடங்கு ஆகும்.

2. (a) பின்வரும் ஒவ்வொரு கூற்றுக்களினதும் மறுப்பு கூற்றினை எழுதுக. "அந்த வகையை சார்ந்தது அல்ல" ("It is not the case that") என்னும் சொற்றொடரையும் அல்லது கூற்றுக்கு முன்னால் "இல்லாது" ("Not") என்னும் சொல்லையும் பாவிக்க வேண்டாம்.
பின்வரும் ஒவ்வொரு கூற்றுக்களையும் நிறுவுக.

(i) $\gamma + \sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறு எண் எனின் $\gamma - 2$ ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

(ii) $\gamma + \sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறா எண் அல்லது $\gamma - \sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

(iii) $r\sqrt{2}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகவும் மற்றும் $r + \sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகவும் ஆகுமாறு பூச்சியமற்ற மெய்யெண் r ஒன்று உண்டு.

(b) p மற்றும் q என்பன கூற்றுக்கள் என்க. உண்மை அட்டவனையை பயன்படுத்தாது அல்லது சமனான முறையை பயன்படுத்தாது பின்வரும் ஒவ்வொரு கூற்றுக்களையும் நிறுவுக.

(i) $p \vee q$ என்பது தர்க்கரீதியில் $(not\ p) \Rightarrow q$ இற்கு சமனாகும்.

(ii) $p \wedge q$ என்பது தர்க்கரீதியில் $not[\ p \Rightarrow (notq)\ ]$ இற்கு சமனாகும்.

3. (a) $x_1 = 3,\ x_2 = 21$ மற்றும் ஒவ்வொரு $n \in \mathbb{N}$ களுக்கும் $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 0$ இணை திருப்பதிபடுத்துமாறு $\langle x_n \rangle$ என்பது மெய்யெண்களின் ஒரு தொடரி என்க. ஒவ்வொரு $n \in \mathbb{N}$ இற்கும் $x_n = 5^n - 2^n$ என நிறுவுக.

(b) ஒவ்வொரு $m \in \mathbb{N}$ இற்கும் $n > m$ மற்றும் $10n + 1$ முதன்மை இல்லாதவாறு $n \in \mathbb{N}$ உண்டு என நிறுவுக.

(c) ஒவ்வொரு $m, n \in \mathbb{N}$ இற்கும் $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ என்பது விகிதமுறும் எனின் $\sqrt{m}$ என்பது விகிதமுறும் மற்றும் $\sqrt{n}$ என்பது விகிதமுறும் என நிறுவுக.

4. பின்வரும் ஒவ்வொரு கூற்றுக்களும் உண்மையானதா அல்லது பொய்யானதா என்பதை கூறி உமது விடையினை நிறுவுக.

a) ஒவ்வொரு $m \in \mathbb{N}$ இற்கும் $m + n$ ஒரு முதன்மை ஆகாதவாறு $n \in \mathbb{N}$ உண்டு.

b) $m + n$ ஒரு முதன்மை ஆகாதவாறு ஒவ்வொரு $n \in \mathbb{N}$ இற்கும் $m \in \mathbb{N}$ உண்டு.

c) ஒவ்வொரு $m \in \mathbb{N}$ இற்கும் $m + n$ ஒரு முதன்மை ஆகுமாறு $n \in \mathbb{N}$ உண்டு.

d) $m + n$ ஒரு முதன்மை ஆகுமாறு ஒவ்வொரு $n \in \mathbb{N}$ இற்கும் $m \in \mathbb{N}$ உண்டு.

5. பின்வரும் ஒவ்வொரு கூற்றுக்களையும் சரி அல்லது பிழை என நிறுவுக.

a) ஒவ்வொரு $m \in \mathbb{Z}$ இற்கும், m ஆனது 3 இன் மடங்கு அல்லது m ஆனது 2 இன் ஒரு மடங்காகும்.

b) ஒவ்வொரு $m \in \mathbb{Z}$ இற்கும், $(m^2 - 1)$ ஆனது 3 இன் ஒரு மடங்கு அல்லது m^2 ஆனது 3 இன் ஒரு மடங்காகும்.

c) $\frac{3m+1}{2m+1} < \frac{13}{10}$ என ஆகுமாறு $m \in \mathbb{N}$ உண்டு.

எனூ ஒவ்வொரு $n \geq m$ இற்கும், $\frac{3n+1}{2n+1} - \frac{3}{2} < \frac{1}{2018}$ என ஆகுமாறு $m \in \mathbb{N}$ உண்டு

00075

6. (a) $p, q \in \mathbb{Z}$ என்க. $\frac{p^2+q^2}{4}$ ஒரு முழுவெண் என்றால் என்றால் மட்டும் p இரட்டை மற்றும் q இரட்டை என நிறுவுக.

(b) m ஆனது ஒரு ஒற்றை நேர்முழுவெண் என்க . $\sqrt{2m}$ ஆனது விகிதமுறாது என நிறுவுக.

(c) p இரட்டை , q ஒற்றை மற்றும் $\sqrt{\frac{p^2+q^2}{2}} \in \mathbb{Q}$ ஆகுமாறு $p, q \in \mathbb{Z}$ என்பவை உண்டா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.